Высшая Проба — 21-9/10, решения, критерии

№1 (14 баллов)

Через $\langle x\rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n+\frac{1}{2}\rangle = n$ при целом n). Положим $b_k = k + \langle\sqrt{k}\rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности b_1, b_2, b_3, … в порядке возрастания; получим последовательность a_1, a_2, a_3, …. Найдите явную формулу для числа a_n.

Решение

Ответ: $a_k = k^2$

$(k+1/2)^2 = k^2+k+1/4$. Значит, $n \le k^2+k$ равносильно тому, что $\langle\sqrt{n}\rangle \le k$, а $n \ge k^2+k+1$ равносильно тому, что $\langle\sqrt{n}\rangle \ge k+1$. Значит, $\langle\sqrt{n+1}\rangle - \langle\sqrt{n}\rangle = 1$ равносильно тому, что n представляется в виде k^2+k.

Решение 1

Следовательно, $b_{n+1}-b_n = n+1+\langle\sqrt{n+1}\rangle - n - \langle\sqrt{n}\rangle = 2$ равносильно тому, что n представляется в виде k^2+k, в иных случаях $b_{n+1}-b_n = n+1+\langle\sqrt{n+1}\rangle - n - \langle\sqrt{n}\rangle = 1$.

Значит, верно, что если число a не встречается в последовательности, то существует такое i, что $b_i = a-1$, а $b_{i+1} = a+1$. Но мы знаем, что в этом случае $b_i = k^2+k+k = (k+1)^2-1$, а $b_{i+1} = k^2+k+1+k+1 = (k+1)^2+1$. Следовательно, каждое такое a_i представляется в виде $(k+1)^2$.

Решение 2

Докажем, что любое число вида k^2 не встречается в последовательности b_i. Для единицы это очевидно, так как $b_1 = 2$.

Теперь пусть число представляется в виде $(k+1)^2$. Тогда если $i \le k^2+k$, то $b_k \le k^2+k+k < (k+1)^2$, а если $i \ge k^2+k+1$, то $b_k \ge k^2+k+1+k+1 > (k+1)^2$.

Теперь докажем, что все остальные числа встречаются в последовательности b_i. Пусть число x лежит в интервале $(k^2,(k+1)^2)$. Тогда $b_{x-k} = x-k+\langle x-k\rangle = x-k+k = x$.

Критерии.

А0 Верный ответ без основания: —. (2 балла).

А2 Незначительные ошибки, не влияющие на ход решения: +. (14 баллов).

А3 Доказано, что квадраты получить невозможно, но не доказано, что все остальные числа получить можно: +/2 (7 баллов).

Автор: Т.Зайцев

№2 (17 баллов)

Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке $[0,2]$ (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$, пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n, такая, что

$$x_{n+1} = 3|x_n-1|-1, \quad n \geqslant 1.$$

Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0,2]$?

Решение

Ответ: $(\frac{2}{3})^{2020}$. Будем доказывать индукцией по n следующие два утверждения.

(1) Вероятность того, что $x_n \in [0,2]$, равна $(\frac{2}{3})^{n-1}$.

(2) Вероятность того, что x_n попадет в заданный интервал на отрезке $[0,2]$, пропорциональна его длине.

База индукции следует из условия задачи. Пусть (1) и (2) выполнены для $n=k$. По условию $x_{k+1} = f(x_k)$, где $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ определяется по формуле $f(x) = 3|x-1|-1$. Заметим, что прообраз отрезка $[0,2]$ при отображении f есть объединение отрезков $[0,\frac{2}{3}]$ и $[1\frac{1}{3},2]$. Таким образом, вероятность того, что $x_{k+1}\in[0,2]$, равна вероятности того, что $x_k \in [0,\frac{2}{3}]\cup[1\frac{1}{3},2]$. Суммарная длина отрезков $[0,\frac{2}{3}]$ и $[1\frac{1}{3},2]$ составляет $\frac{2}{3}$ от длины отрезка $[0,2]$. Поэтому из утверждений (1) и (2) для $n=k$ следует, что искомая вероятность равна $\frac{2}{3}\cdot(\frac{2}{3})^{k-1} = (\frac{2}{3})^k$. Утверждение (1) для $n=k+1$ доказано. Теперь заметим, что функции $f|_{[0,\frac{2}{3}]}$ и $f|_{[1\frac{1}{3},2]}$ являются линейными, и их образы совпадают с отрезком $[0,2]$. Таким образом, утверждение (2) для $n=k+1$ следует из аналогичного утверждения для $n=k$. Переход индукции доказан.

Критерии.

А0 Утверждение (2) сформулировано, но не доказано: +/— (15 баллов).

А1 Утверждение (2) используется, но явно не формулируется (и не доказывается): +/2 (11 баллов).

A2 Незначительные ошибки, не влияющие на ход решения: $+$. (17 баллов).

A3 Доказательство того, что если точка попала в промежуток $(2/3;\ 4/3)$, то дальше точки в нужный отрезок не попадают: —. (2 балла).

A4 Без основания утверждается, что x_{2021-i} должно лежать в i-ой итерации множества Кантора: —/+ (6 баллов).

Автор: В.Тиморин

№3 (8 + 20 баллов)

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если
а) $n = 404$;
б) $n = 406$?

Решение

Пункт а). Цветов не может быть больше 202, иначе есть цвет, в который покрашен только один дом, тогда домов этого этого цвета ни в каком отрезке не может быть строго больше, чем любого другого. Покажем, как построить пример на 202 цвета, то есть чтобы для каждого цвета в него было покрашено ровно два дома, притом существовал бы отрезок, в который эта пара одноцветных попадает, а любая другая — нет.

Назовем *198-блоком* следующую конструкцию: подряд стоят 198 домов, пары домов на расстоянии 99 (т. е. такие, между которыми ровно 98 других домов) покрасим в один цвет, и больше в цвет этой пары не будем красить другие дома (не только в этом блоке, но и вообще из участвующих домов); *2-блоком* назовем стоящие подряд два дома, покрашенные в уникальный цвет. Тогда 404 дома можно раскрасить так: 2-блок, 198-блок, 2-блок, 2-блок, 198-блок, 2-блок.

Осталось показать, что этот пример верный. В самом деле, у любого 2-блока есть соседний 198-блок, а значит, можно взять 100 домов подряд, у которых 2-блок является крайним, а все остальные цвета встречаются по одному разу. Для цветов 198-блока можно взять 100 домов, содержащих оба дома цвета i. Тогда домов этого цвета будет два, а все остальные цвета будут встречаться на этом отрезке по одному разу.

Пункт б). Этот же пример позволяет реализовать 202 цвета на 406 домах: в конец добавим еще два дома, цвет которых совпадает с последним 2-блоком.

Оценка. Понятно, что в каждый цвет должно быть покрашено хотя бы два дома, значит, ответ для $n = 406$ не больше 203. Если для $n = 406$ ответ 203, то в каждый цвет покрашено ровно два дома. Занумеруем цвета в порядке их появления слева направо, и пусть дома i-го цвета имеют номера a_i и b_i, причем $a_i < b_i$. По определению $1 = a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{203}$. Докажем, что $b_1 < b_2 < b_3 \cdots < b_{203} = 406$. Предположим противное, т.е. пусть для каких-то $i < j$ оказалось $b_j < b_i$. Вспомнив, что $a_j < b_j$ и $a_i < a_j$, получаем, что $a_i < a_j < b_j < b_i$, то есть любой отрезок, содержащий a_i, b_i, также содержит a_j, b_j, то есть нет отрезка, на котором домов i-го цвета больше всего. Противоречие.

Заметим, что должны выполняться еще два неравенства: $b_i - a_i \leq 99$ (иначе нет отрезка из 100 домов, в который попали оба дома из пары a_i, b_i) и $b_{i+1} - a_{i-1} \geq 101$ (иначе каждый отрезок, содержащий a_i, b_i, также содержит a_{i-1}, b_{i-1} или a_{i+1}, b_{i+1}).

Все готово для решения. Среди первых 100 номеров домов есть ровно один номер из множества $\{b_i\}$, это b_1: иначе, если там есть и b_2, среди домов от 1 до 100 есть два дома второго цвета, тогда для первого цвета нет отрезка, в котором его больше чем любого другого (поскольку только отрезок $[1, 100]$ содержит два дома первого цвета, но он содержит и два дома второго). Значит, среди первых 100 домов ровно 99 имеют номера из множества $\{a_i\}$. Тогда среди 99 номеров от 101 до 199 должны присутствовать 98 чисел из множества $\{b_i\}$, следовательно, из множества $\{a_i\}$ там может быть максимум один номер — a_{100}. Мы доказали, что $a_{101} \geq 200$. Повторив то же самое рассуждение с другого конца, получим, что $b_{103} \leq 207$. Но это противоречит неравенству $b_{103} - a_{101} \geq 101$: мы не сможем найти отрезок из 100 домов для $i = 102$.

Критерии 3а

A0 Оценка без примера: —. (1 балл).

A1 Пример с обоснованием без оценки: $+$. (7 баллов).

A2 Верное решение без обоснования примера: $+$/— (7 баллов).

A3 Придуманы 198-блоки, дальше неверно: —/+ (2 балла).

Критерии 3b

A0 Не объяснено или плохо доказано противоречие для 8 домов и 3 цветов: $+/-$ (15 баллов).

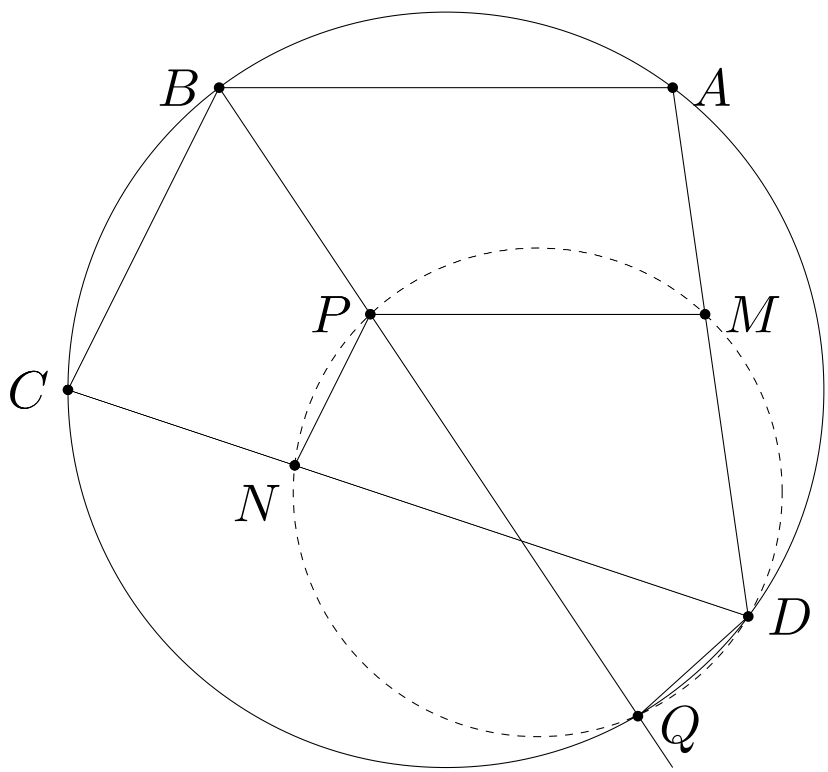
A1 Пример (даже без обоснования) без оценки: $-$. (0 баллов).

A2 Серьёзные ошибки или плохие доказательства в рассуждениях до центральных домов (включая центральные количества, отличные от 8), есть замечание или попытка вывести противоречие из трёх пар в центральной группе: $+/2$ (10 баллов).

Авторы: А.Акбари, Г.Челноков

№4 (23 балла)

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Точки M и N лежат на сторонах AD и CD соответственно. Прямые, проходящие через M и N и параллельные соответственно AB и BC, пересекаются в точке P, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q, лежащей на дуге CD. Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.



Решение 1.

Четырехугольник $BADQ$ вписан, поэтому $\angle BAD + \angle PQD = 180°$. Из параллельности AB и MP следует, что $\angle BAD = \angle PMD$. Таким образом, $\angle PMD + \angle PQD = 180°$. Следовательно, четырехугольник $PMDQ$ является вписанным.

Четырехугольник $BCQD$ тоже вписан, поэтому $\angle BCD = \angle PQD$. Из параллельности BC и PN следует, что $\angle BCD = \angle PND$. Таким образом, $\angle PND = \angle PQD$. Следовательно, четырехугольник $PNQD$ тоже является вписанным.

Из вписанности четырехугольников $PMDQ$ и $PNQD$ следует, что точки P, M, N, Q, D лежат на одной окружности.

Решение 2.

Четырёхугольник $BCDQ$ вписанный, поэтому прямые QD и BC антипараллельны относительно пары прямых BQ и CD. По условию $BC||NP$, следовательно, прямая QD антипараллельна NP относительной той же пары прямых. Таким образом, четырёхугольник $PNDQ$ является вписанным.

Аналогично доказывается, что $PMDQ$ вписанный. Таким образом, точки P, M, N, Q, D лежат на одной окружности.

Критерии.
A1 Доказательство того, что $MPND$ вписанный: — (0 баллов).

Автор: А.Заславский

№5 (30 баллов)

Сережа задумал натуральное число n, не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1. Затем на i-ом шаге ($i = 2, 3, \dots$) он делит с остатком число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i. Докажите, что $\overline{0, q_1q_2q_3\dots} = \frac{n}{2019}$.

Решение

Сначала проверим по индукции, что $q_k \le 9$ для всех k. Неравенство $q_1 \le 9$ следует из того, что $n \le 2019$. Пусть $q_i \le 9$ для некоторого i. Так как $r_i \le 201$, то $\overline{r_iq_i} \le 2019$. Из этого следует, что $q_{i+1} \le 9$. Переход индукции доказан.

Таким образом, условие можно переписать в виде

$$n = 202q_1 + r_1, \tag{1}$$

$$10r_i + q_i = 202q_{i+1} + r_{i+1} \ \text{ для всех } \ i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Искомое равенство

$$\overline{0, q_1q_2q_3\dots} = \frac{n}{2019}$$

равносильно тому, что для любого k выполнены неравенства

$$0 \le \frac{n}{2019} - \overline{0, q_1q_2\dots q_k} \le 10^{-k}. \tag{3}$$

Умножив систему неравенств (3) на $2019 \cdot 10^k$, получим

$$0 \le 10^k n - 2019 \cdot \overline{q_1q_2\dots q_k} \le 2019. \tag{4}$$

Преобразуем среднюю часть системы (4) следующим образом:

$$10^k n - 2019 \cdot \overline{q_1q_2\dots q_k} = 10^k n - 2020 \cdot \overline{q_1q_2\dots q_k} + \overline{q_1q_2\dots q_k} =$$

$$= 10^k n - 202 \cdot 10^k q_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\dots q_k} + \overline{q_1q_2\dots q_k} =$$

$$= 10^k(n - 202q_1) - 2020 \cdot \overline{q_2\dots q_k} + \overline{q_1q_2\dots q_k} = 10^k r_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\dots q_k} + \overline{q_1q_2\dots q_k}, \tag{5}$$

где последнее равенство следует из (1).

Лемма 1. *Для любого $s = 1, 2, \dots, k-1$ выполняется равенство*

$$10^{k-s+1} r_s - 2020 \cdot \overline{q_{s+1}\dots q_k} + \overline{q_s\dots q_k} = 10^{k-s} r_{s+1} - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\dots q_k} + \overline{q_{s+1}\dots q_k}.$$

Доказательство.

$$10^{k-s+1} r_s - 2020 \cdot \overline{q_{s+1}\dots q_k} + \overline{q_s\dots q_k} = 10^{k-s}(\overline{r_sq_s} - 202q_{s+1}) - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\dots q_k} + \overline{q_{s+1}\dots q_k} =$$

$$= 10^{k-s} r_{s+1} - 2020 \cdot \overline{q_{s+2}\dots q_k} + \overline{q_{s+1}\dots q_k},$$

где последнее равенство следует из (2), если положить $i = s$. □

Применим Лемму 1 последовательно $k-1$ раз (для $s = 1, 2, \dots, k-1$) к правой части равенства (5). Получим цепочку равенств

$$10^k r_1 - 2020 \cdot \overline{q_2\dots q_k} + \overline{q_1q_2\dots q_k} = \dots = 100r_{k-1} - 2020 \cdot q_k + \overline{q_{k-1}q_k} = 10r_k + q_k.$$

Таким образом, (4) равносильно неравенствам

$$0 \le 10r_k + q_k \le 2019,$$

которые следуют из того, что $r_k \le 201$ и $q_k \le 9$.

Критерии.

A0 Не доказано, что $q_i < 10$: +. (28 баллов).

A1 Ошибки в строгости неравенств: +. (28 баллов).

A0+A1: +. (28 баллов).

A2 Решение через деление в столбик, и при этом ничего не написано про случай, когда в некоторый момент в частном получается 2019 (или разобран только случай, при котором $n = 2019$, и не доказано, что иначе 2019 не может появиться ни на каком шаге): +/— (25 баллов).

A3 Решение через деление в столбик. Доказано, что если n не равно 2019, то остаток не может быть равен 2019 ни на каком шаге. При этом случай $n = 2019$ не разобран: +. (28 баллов).

A4 Разность $(n/2019 - 0, q_1q_2q_3 \ldots q_k)$ выражена через q_{k+1} и r_{k+1}, далее из этого без доказательства делается вывод об искомом равенстве (оценка вышеуказанной разности отсутствует): +/— (25 баллов).

A0+A2: +/— (25 баллов).

A0+A3: +. (28 баллов).

A0+A4: +/— (25 баллов).

Автор: С.Губанов

№6 (32 балла)

В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n — натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Роботу можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника, робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

Решение

Ответ: При n=1

При $n = 1$ подойдет следующая последовательность команд: сдвинуться дважды вдоль $\overline{AB}$, потом дважды вдоль $\overline{BC}$, потом дважды вдоль $\overline{AB}$.

Пусть $n > 1$. Разделим треугольник на 9 маленьких треугольников прямыми, каждая из которых параллельна одной из сторон треугольника и делит две другие в отношении $2:1$. Назовем точки на этих прямых *опасными*.

Разобьем все команды на серии одинаковых. Если в серии 1 команда, то робот может ее проигнорировать, так что можно считать, что таких серий не было.

Решение 1:

Утверждение: Выполняя текущую серию, робот может сделать так, чтобы не попасть на опасную прямую, сонаправленную следующей серии. Докажем это по индукции.

База индукции очевидна.

Переход: по предположению индукции робот сейчас стоит не на опасной прямой, сонаправленной текущей серии команд. Поскольку серия состоит из как минимум двух команд, некоторые из которых робот может проигнорировать, в общем случае у него есть как минимум две возможные позиции, в которые он может попасть после выполнения текущей серии. Расстояние между соседними возможными позициями робота равно одному его шагу, то есть 1 метру. Значит, хотя бы одна из этих позиций не лежит на опасной прямой, сонаправленной следующей серии, так как расстояние между ними равно n.

Возможен случай, что у робота есть только одна возможная позиция, в которую он может попасть при выполнении текущей серии команд: если после первого же шага в нужном направлении он окажется на границе треугольника. Но эта позиция, очевидно, является безопасной, так как по предположению индукции робот сейчас сдвигается не вдоль опасной прямой. Следовательно, переход доказан.

Поскольку робот может сделать так, чтобы ни в какой момент времени не сдвигаться вдоль опасной прямой, мы не сможем заставить его наехать на мину.

Решение 2:

Позволим роботу размножаться: из каждого существовавшего на каком-то ходе робота будут получаться роботы во всех позициях, в которых робот может быть сейчас. Будем рассматривать множества позиций, занятых роботами после серии команд двигаться в одном направлении, далее будем называть их просто Множествами Позиций. Назовем точку мертвой, если в ней пересекаются две проведенные прямые, полуживой, если она принадлежит ровно одной проведенной прямой, и живой в остальных случаях.

Докажем индукцией по числу серий команд, что множество позиций всегда содержит или одну живую точку, или две полуживые, принадлежащие прямым разных направлений. Это очевидно. И это означает, что робота нельзя гарантированно загнать на мину.

Критерии.

A0 Разобран случай n=1: —. (3 балла).

A1 Считается, что робот видимый: — (0 баллов).

A2 Идея избегания 6 прямых: —/+ (12 баллов).

A3 Идея раздвоения/идея избегать только прямых, сонаправленных следующему ходу: —/+ (12 баллов).

Авторы: П.Рябов, Г.Челноков

№7 (12 + 26 баллов)

Пусть ABC — равносторонний треугольник на плоскости, а S — круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус. Пусть радиус круга S равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* — значит отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.

б) Пусть d — расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в круг S после ровно 1000 операций. Найдите максимум и точную нижнюю грань возможных значений d.

Решение. Пусть O — центр круга S (и описанной окружности треугольника ABC). Прямые OA, OB, и OC разделят плоскость на 6 частей, которые назовем областями. Пусть эти прямые пересекают окружность S в точках A_1, A_2, B_1, B_2 и C_1, C_2 соответственно (A_1 и A на одном луче от O, A_2 – на другом, для других точек аналогично). Тогда стороны угла B_2OC_2 являются серединными перпендикулярами к отрезкам AC и AB, а значит, для всех точек угла B_2OC_2 (равного 120°) и только для них точка A является ближайшей из A, B, C. При этом для точек, которые лежат внутри угла C_2OA_1, но вне круга S, после операции вершина C станет ближайшей, а для точек, лежащих внутри угла A_1OB_2, но вне круга S, ближайшей станет вершина B. Для вершин B и C аналогично.

Рассмотрим, что происходит при применении нескольких операций к точке X_0. Пусть X_k — образ точки X_0 после применения к ней k операций. Сформулируем несколько утверждений.

Утверждение 0. Если X_k лежит в S, то все X_n при $n > k$ тоже.

Доказательство очевидно.

Теперь мы можем без ограничения общности считать, что X_0 лежит в угле A_1OB_2 и вне круга S.

Утверждение 1. Вектор X_0X_2 равен удвоенному вектору AB.

В самом деле, для X_0 ближайшая вершина — A, для X_1 — B, композиция симметрий относительно A потом B дает параллельный перенос на вектор $2AB$.

Соответственно, если все точки X_0, X_2, X_4, …, X_{2k} лежат в A_1OB_2, но не в S, то все векторы X_0X_2, X_2X_4, X_4X_6, …, $X_{2k}X_{2k+2}$ равны $2AB$.

Утверждение 2. Пусть X_{2k+2} — первая из четных точек, не лежащая одновременно в угле A_1OB_2 и вне круга S. Тогда X_{2k+2} лежит в одной из трех областей: S, A_1OC_2 (вне круга S) и B_2OC_1 (вне круга S).

Доказательство очевидно.

Итак, без ограничения общности можно считать, что X_{2k+2} попала в A_1OC_2 (вне круга S).

Утверждение 3. Если X_{2k+2} – первая из четных точек, попавшая в A_1OC_2, то X_{2k+4} попадет в S или A_1OB_2, X_{2k+6} попадет в S или A_1OC_2 и так далее (за каждые два хода точка перескакивает через границу между теми же двумя соседними углами, или запрыгивает в S).

Доказательство очевидно.

Итак, если точка на каком-то шаге за две операции перескочит из угла в соседний, то дальше за каждую пару операций точка перепрыгивает между ровно этими двумя соседними углами, пока не попадет в круг S. Докажем, что это рано или поздно произойдет. В самом деле, пусть точка за двойную операцию переходит между A_1OC_2 и A_1OB_2. Тогда она за каждую двойную операцию смещается на вектор $2AB$ или $2AC$. Оба вектора имеют проекцию $-\frac{3}{4}$ на луч OA, значит, рано или поздно проекция точки на OA будет иметь отрицательную координату, то есть точка покинет углы A_1OC_2 и A_1OB_2. По Утверждению 3 сделать это четная точка может, только попав в S, что завершает доказательство пункта A.

Критерии.

A0 Доказательство того, что расстояние до центра уменьшается с каждой операцией: —. (0 баллов).

A1 Плоскость разделена на 6 зон прямыми, проходящими через точку O. Показано, что композиция двух шагов является параллельным переносом на удвоенную сторону треугольника, причем выбор стороны зависит от зоны, где находилась точка: —/+ (5 баллов).

б)

Ответ: $\sqrt{561751} < d \leq 1 + 500\sqrt{3}$

Решение аналогично 11.6

Критерии:

A0 Найдено самое дальнее расстояние: —. (5 баллов).

Автор: В.Тиморин

Таблица перевода оценок в баллы:

Знаки -> Баллы	1	2	3а	3б	4	5	6	7а	7б
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—	0	0	0	0	0	0	0	0	0
—.	2	2	1	0	3	3	3	0	5
—/+	4	6	2	6	8	8	12	5	10
+/2	7	11	4	10	13	15	16	6	15
+/—	11	15	7	15	18	25	24	9	20
+.	14	17	7	18	23	28	30	12	26
+	14	17	8	20	23	30	32	12	26